

概率论进阶梗概

DZLIU@202306

以“概率论”为基础，“概率论”课的基本要求如下：

- 【1】熟悉和理解核心概念，如概率空间、随机变量、独立性、期望、方差、矩和随机变量的收敛等
- 【2】熟悉典型分布的例子，如伯努利、二项、泊松、均匀、指数和正态分布
- 【3】掌握基本工具方法，如母函数、矩母函数和特征函数，
Markov 不等式和 **Borel-Cantelli** 引理
- 【4】理解和运用概率论的两大核心定理：大数定律和中心极限

“概率论进阶”讲授内容在概率论课程基础上分三块：

I. 中心极限定理重访

掌握矩方法和 **Lindeberg** 替换技巧，两者除可验证中心极限定理外，另有妙用，如大数定律的验证和 **CLT** 的收敛速度

II. 随机矩阵初步

Wigner 对称和厄米随机矩阵，即对称性假设外矩阵元为独立分布且满足一定的矩条件；**GOE** 和 **GUE** 的定义和性质；**Wigner** 半圆律与矩方法

III. 统计力学模型

信息熵，定义与性质；**Gibbs** 分布，定义；**Ising** 模型（1维）和 **Curie-Weiss** 模型，围绕模型中出现的大数定律与中心极限定理来理解铁磁性相变现象，了解统计力学是概率论问题的源泉和重要课题；欣赏中国学者的“小珍品”，李政道和杨振宁先生的李-杨单位圆定理

概率论进阶的学习以课堂讲授内容和作业为主，从基础到前沿的转变，从学习到科研状态的过渡

2023.06 6 日-20 日 周一 6.7 节 周二 345 节, 五教 5401

统计力学模型

1 信息熵的定义与性质

2 最大熵原理与 Gibbs 分布

3 Ising 模型 (1 维情形)

4 Curie-Weiss 平均场模型

5 Lee-Yang 单位圆定理 (时间允许时)

重点介核心概念与模型, 通过研究模型中出现的大数定律与中心极限定理来理解铁磁性相变现象, 认识到统计力学是概率问题的源泉和核心课题, 理解和欣赏概率论与数学物理交叉问题与领域!

Lee-Yang 单位圆定理与黎曼猜想

6.19 日第 6、7 节 5401 概率论进阶课上, 介绍李政道与杨振宁在 Ising 模型里发现的单位圆定理 (此定理杨振宁称之为“一个小珍品”), 以及与黎曼 zeta 函数的关联

